Simulare, Bacalaureat, 12 decembrie 2024
Proba E. c) Matematică *M*_șt-nat

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $z=\frac{1+2i}{1-i}$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$. Să se calculeze $f\left(2^0\right)+f\left(2^1\right)+\ldots+f\left(2^7\right)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x+1)+\log_3(x-1)=3$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{1,2,3,4,5,6\}$, acesta să verifice relația $(n-1)!>21$

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{v}_1=3\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v}_2=\vec{i}-2\vec{j}$. Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v}_1-3\vec{v}_2$.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ știind că $\cos 2x\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin 2x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix} \middle| a\neq b, a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Determinați matricele $A\in M$ astfel încât $\det(A)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $A\cdot B\in M$, oricare ar fi matricele $A,B\in M$.

5p **c)** Determinați $X\in M$ ștind că $X^2=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea $M=(3,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-3x+ay+b$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați numerele reale a,b pentru care $1*2=11$ și $(-1)*4=5$.

5p **b)** Pentru $a=-3$, $b=18$ arătați că $x*y=(x-3)(y-3)+9$.

5p **c)** Determinați numerele reale a,b pentru care legea " $*$ " admite element neutru.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:R\setminus\{-1\}\to R$, $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$, $x\in R\setminus\{-1\}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$.

5p **c)** Demonstrați că $x-y\geq\ln\frac{x+1}{y+1}$, oricare ar fi $x,y>0$, $x\geq y$.

2. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to R$, $f(x)=\frac{x^2+9}{x}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă $F:(0,+\infty)\to R$, a funcției f este crescătoare pentru $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\int\frac{3}{f(x)}dx$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Calculați $\int f(x)\cdot x\cdot\ln x\,dx$,unde $x\in(0,+\infty)$.

Simulare, Bacalaureat, 12 decembrie 2024
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE ***Simulare***

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=\frac{1+2i}{1-i}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ $\operatorname{Re} z=-\frac{1}{2}$	**3p** **2p**
2.	$f\left(2^0\right)+f\left(2^1\right)+\ldots+f\left(2^7\right)=2\cdot 8-\left(2^0+2^1+\ldots+2^7\right)==$ $=16-\frac{1\cdot\left(2^8-1\right)}{2-1}=-239$	**2p** **3p**
3.	$\log_3(2x+1)+\log_3(x-1)=3\Rightarrow(2x+1)(x-1)=27\Rightarrow 2x^2-x-28=0$ $x_1=4$ care convine, $x_2=-\frac{7}{2}$ care nu convine.	**3p** **2p**
4.	Numărul cazurilor posibile este 6. Numărul cazurilor favorabile este 2, pentru $n\in\{5,6\}$ $.\Rightarrow P=\frac{1}{3}$	**2p** **3p**
5.	$\vec{v}_1-3\vec{v}_2=\left(3\vec{i}+\vec{j}\right)-3\left(\vec{i}-2\vec{j}\right)=7\vec{j}$ $\left\vert\vec{v}_1-3\vec{v}_2\right\vert=7$	**2p** **3p**
6.	$\cos 2x\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin 2x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0\Rightarrow\cos 2x\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin 2x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ $\cos\left(2x-x+\frac{\pi}{3}\right)=0\Rightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A)=a^2-b^2$ $\left.\begin{array}{l}\det(A)=0\Rightarrow a^2-b^2=0\Rightarrow a^2=b^2\\ a\neq b\end{array}\right\}\Rightarrow a=-b$. $A=\begin{pmatrix}a & -a\\ -a & a\end{pmatrix}$, $a\in R^*$.	**2p** **3p**
b)	$A=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}, a\neq b, a,b\in R,\ B=\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}, x\neq y,\ x,y\in R$ $A\cdot B=\begin{pmatrix}ax+by & ay+bx\\ ay+bx & ax+by\end{pmatrix}$, $ax+by,\ ay+bx\in R$ $x\neq y, a\neq b\Rightarrow(ax+by)-(ay+bx)=(x-y)(a-b)\neq 0\Rightarrow ax+by\neq ay+bx\Rightarrow A\cdot B\in M$	**2p** **3p**

c)	$X=\begin{pmatrix}x & y\\ y & x\end{pmatrix}, x\neq y,\ x,y\in R\Rightarrow X^2=\begin{pmatrix}x^2+y^2 & 2xy\\ 2xy & x^2+y^2\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{cases}x^2+y^2=5\\ 2xy=4\end{cases}\Rightarrow X\in\left\{\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\right\}$	**3p**
2.a)	$1*2=-1+2a+b$ şi $(-1)*4=-1+4a+b$	**2p**
	$\begin{cases}2a+b=12\\ 4a+b=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=18\end{cases}$	**3p**
b)	$x*y=xy-3x-3y+18=xy-3x-3y+9+9=$	**3p**
	$=x(y-3)-3(y-3)+9=(x-3)(y-3)+9$	**2p**
c)	$x*e=e*x\Rightarrow -3x+ae=-3e+ax\Rightarrow(a+3)(e-x)=0\Rightarrow a=-3$	**3p**
	$x*e=x\Rightarrow x(e-4)-3e+b=0,\quad \forall x\in \boldsymbol{R}\Rightarrow e=4$ și $b=12$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{e^x(x+1)-e^x\cdot 1}{(x+1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$, oricare ar fi $x\in R-\{-1\}$	**2p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$	**3p**
	$f(0)=1, f'(0)=0$ Ecuaţia tangentei este $y-1=0$	**2p**
c)	f crescătoare pe $[0,\infty)$. Cum $x,y>0,\ x\geq y\Rightarrow f(x)\geq f(y)$	**3p**
	$\dfrac{e^x}{x+1}\geq\dfrac{e^y}{y+1}\Rightarrow\dfrac{e^x}{e^y}\geq\dfrac{x+1}{y+1}\Rightarrow e^{x-y}\geq\dfrac{x+1}{y+1}\Rightarrow \ln e^{x-y}\geq\ln\dfrac{x+1}{y+1}\Rightarrow x-y\geq\ln\dfrac{x+1}{y+1}$	**2p**
2.a)	F este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$	**3p**
	$F'(x)=f(x)=\dfrac{x^2+9}{x}>0,\ x\in(0,+\infty)\Rightarrow F$ crescătoare pentru $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\displaystyle\int\frac{3}{f(x)}dx=\int\frac{3x}{x^2+9}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x}{x^2+9}dx=$	**2p**
	$\displaystyle=\frac{3}{2}\int\frac{(x^2+9)'}{x^2+9}dx=\frac{3}{2}\ln(x^2+9)+C$	**3p**
c)	$\displaystyle\int f(x)\cdot x\cdot\ln x dx=\int(x^2+9)\ln x dx=\int\left(\frac{x^3}{3}+9x\right)'\ln x dx=$	**3p**
	$\displaystyle=\left(\frac{x^3}{3}+9x\right)\ln x-\int\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}+9x\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+9x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-9x+C$	**2p**